

2. Quadratisch Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$; ($a \neq 0$) nennt man **quadratische Gleichung** oder **Gleichung zweiten Grades**.

$x^2 + px + q = 0$ nennt man ihre **Hauptform**.

1. Spezialfall: $b = 0$, also $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + q = 0$

Für $q > 0$ hat die Gleichung sicher keine Lösung, weil die linke Seite insgesamt $> \text{Null}$ ist.

Für $q = 0$ hat die Gleichung nur die Lösung $x = 0$.

Für $q < 0$ ergibt sich mit $d = -q$:

$$x^2 + q = 0 \Leftrightarrow x^2 - d = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{d}^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{d})(x - \sqrt{d}) = 0$$

Wir erinnern uns: Ein Produkt kann nur Null sein, wenn mindestens ein Faktor Null ist, also:

$$x_1 = -\sqrt{d} \vee x_2 = \sqrt{d} \quad ; \quad d > 0$$

Kürzer: $x_{1/2} = \pm \sqrt{d}$

Das Zeichen \vee steht für „oder“ als Verknüpfung zweier Aussagen.

Aufgaben:

2. a) $2x^2 = 8$

b) $0,5x^2 = 8$

c) $5x^2 - 45 = 0$

d) $28 - 63x^2 = 0$

e) $\frac{x^2}{12} = \frac{1}{27}$

f) $\frac{x^2}{35} - \frac{7}{125} = 0$

g) $\frac{13}{6} = \frac{78x^2}{49}$

h) $\frac{22}{3} - \frac{24x^2}{11} = 0$

i) $\frac{0,125x^2}{3} = \frac{1,5}{4}$

Beachte bei den folgenden Aufgaben die Definitionsmengen!

3. a) $\frac{4x-1}{x+1} = \frac{x-1}{4x+1}$

b) $\frac{2x-5}{3x+10} = \frac{x}{2x+10}$

5. a) $\frac{3}{x+2} - 4 = \frac{3}{x-2}$

c) $\frac{x+10}{2x-5} + \frac{5x+4}{x+7} = 0$

d) $\frac{x+10}{2x+5} = \frac{5x-4}{x+7}$

c) $\frac{6x-8}{3x} + 2x = \frac{3x+4}{2} - x$

• e) $\frac{3x+2}{x+1} = \frac{7x+3}{2x+2}$

• f) $\frac{2x+7}{4x-6} = \frac{2x+2}{1,5-x}$

b) $\frac{1}{5x+2} + \frac{4}{x-1} + 7 = 0$

g) $\frac{16x-1}{x+4} = \frac{4x+25}{2-9x}$

h) $\frac{3x+2}{2x-3} = \frac{11x+8}{5x-9}$

d) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} + 2$

• 6. Führe die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

a) $ax^2 = b^2$

b) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - a^2 = 0$

c) $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$

d) $a^2x^2 - a = b^2x^2 - b$

e) $(3x-2a)^2 - (2x-3a)^2 = 4a^2$

f) $\frac{(bx-a)^2}{a^2} + \frac{2bx-a}{a} = b$

• 7. Führe die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

a) $x^2 + a = b$

b) $ax^2 = b$

c) $(x+2a)^2 + (2x-a)^2 = 5a$

d) $(3x-2a)^2 + 64 = (x-6a)^2$

e) $a(x-b)^2 + ax(x+2b) = \frac{1}{a}$

f) $(ax+b)^2 + (bx+a)^2 = 2a^2 + 2abx(x+2)$

8. a) $(x-7)^2 = 9$

b) $(x+2\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9}$

c) $(x+2)^2 = 2$

d) $(0,5x-1,5)^2 = 2,25$

e) $(x-3)^2 = -3$

f) $(3-x)^2 = 3$

g) $(x-a)^2 = b^2$

h) $(x+a)^2 = (2x+a)^2$